**Тема 4. Управление рыночными рисками**

4.1 Портфельный подход к управлению рыночными рисками   
 4.1.1 Модель инвестиционного портфеля Г. Марковица   
 4.1.2 Модель рыночного портфеля Дж. Тобина

4.1.3 Модель оценки финансовых активов (CAPM)

4.2 Показатель VaR как мера рыночного риска

4.1 Портфельный подход к управлению рыночными рисками   
 4.1.1 Модель инвестиционного портфеля Г. Марковица

Портфель активов – набор активов, являющихся титулами собственности или иных благ, который представляет собой композиционный актив, имеющий параметры риска и доходности, изменяющиеся под воздействием колебаний двух факторов:

* изменения состава портфеля;
* изменения риска и доходности составляющих портфель активов в связи с изменениями как самих активов, так и прочей конъюнктуры.

Понятие портфеля наиболее широко используется для обозначения сово­купности ценных бумаг, присущие им рыночные риски формируют резуль­тирующий портфельный рыночный риск.

Модель портфельного анализа Г.Марковица (H.Markowitz) основана на следующих предположениях:

* рынок состоит из конечного числа абсолютно ликвидных активов, которые подразумеваются бесконечно делимыми;
* доходности рисковых активов являются нормально распределенными случайными величинами;
* существуют открытые и достоверные исторические данные о доходности активов;
* индивидуальные предпочтения инвестора задаются функцией полезности от двух аргументов: ожидаемой доходности, измеряемой математическим ожиданием, и риска, оцениваемого дисперсией (или стандартным отклонением), соответственно сравнение портфелей осуществляется на основе только этих двух критериев;
* инвестор несклонен к риску;
* налоги и транзакционные издержки равны нулю.

Как было показано ранее (рисунок 3.1), кривые безразличия субъекта, несклонного к риску, в координатах риск *σ* (стандартное отклонение доходности портфеля) - ожидаемая доходность *m* (математическое ожидание доходности портфеля) являются выпуклыми.

σ

m

U3

U2

U1

***U1<U2<….<Un***

Функция полезности инвестора  содержит два противоречивых критерия: желаемое повышение ожидаемой доходности и желаемое понижение риска портфеля. Это типичная двухкритериальная зада­ча оптимизации. Формализуем ее.

Пусть инвестор формирует некоторый портфельиз *n* активов:

где – доля капитала, размещенного в *i-*ый актив;

– совокупность портфелей, которые могут быть сформированы

из *n* активов (достижимое множество портфелей).

Ранее было зафиксировано, что в рамках модели Г.Марковица доходности активов являются нормально распределенными случайными величинами. Нормальное распределение, как известно, всегда характеризуется двумя параметрами: математическим ожиданием и дисперсией случайной величины.

Распределение доходности каждого *i-*го актива имеет математическое ожидание *mi* и стандартное отклонение , а любой портфель  – математическое ожидание доходности и стандартное отклонение .

Чтобы измерить риск всего портфеля , нужно знать не только стандартное отклонение доходности отдельных активов *σi*, но и степень, с которой доходности пар активов изменяются вместе, а именно ковариацию (или коэффициент корреляции) их доходностей.

Ковариация – это статистическая мера линейной взаимосвязи случайных величин.

Напомним, что в данной модели случайной величиной выступат доходности активов, входящих в портфель. Ковариация доходностей активов *i*-го и *j*-го типа есть:

Положительное значение ковариации показывает, что доходности активов имеют тенденцию изменяться в одну сторону. Отрицательная ковариация показывает, что доходности имеют тенденцию компенсировать друг друга. Относительно небольшое или нулевое значение ковариации, показывает, что линейная связь между доходностью активов слаба либо отсутствует вообще.

Ковариация симметрична

Напомним, что равенство ковариации нулю является необходимым, но не достаточным условием независимости признаков, т.к. ковариация – характеристика только линейнойсвязи. Если ковариация равна нулю, случайные величины линейно независимы, но какая-то другая форма зависимости между ними может существовать.

Для проведения сравнительного анализа используется также коэффициент корреляции – нормированная ковариация:

Если , то между случайными величинам *i* и *j* существует положительная функциональная линейная связь; если – отрицательная функциональная линейная связь; если – случайные величины некоррелированы (однако это не означает их независимость вообще).

Замечание: если случайные величины *i* и *j* подчиняются нормальному закону распределения, то их некоррелированность означает их независимость.

Тогда, риск портфеля рассчитывается как сумма ковариаций всех пар активов, взвешенная на произведение долей каждой пары соответствующих активов в портфеле:

Ожидаемая доходность портфеля:

Рассмотрим пример.

Вычислить риск и ожидаемую доходность портфеля ценных бумаг по следующим исходным данным

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Доходность ЦБ типа А, % | Доходность ЦБ типа B, % | Доходность ЦБ типа C, % | Вероятность |
| 20 | -20 | -20 | 0,1 |
| 38 | 20 | 0 | 0,3 |
| 52 | 10 | 45 | 0,2 |
| 70 | 35 | 18 | 0,4 |

Предположение: доходность ценной бумаги каждого типа имеет нормальное распределение.

Решение

Ожидаемая доходность ценных бумаг каждого типа вычисляется по формуле математического ожидания случайной величины:

.

Тогда, ожидаемая доходность портфеля в целом равна

Вычислим значение ковариации доходностей ценных бумаг

Риск портфеля, определяемый дисперсией его доходности, равен

.

Суммируя представленные выше результаты, получаем, что решаемая инвестором задача (максимизация ожидаемой доходности портфеля и минимизация его риска) формализуется следующим образом:

– своб., .

Знаковость *хi* означает характер сделки по данному виду активов: *хi*>0 означает длинную позицию, *хi*<0 означает короткую позицию [1, 2].

Исходная двухкритериальная задача (\*) сводится к однокритериальной путем фиксации уровня:

* риска

– своб., .

* ожидаемой доходности (модель Марковица)

– своб., .

Задача Марковица при наличии только ограничений-равенств относится к классу классических задач квадратичной оптимизации.

Портфель *x\*(x1,…,xn)*, являющийся решением оптимизационной задачи (\*1) или (\*2), называется эффективным портфелем.

Это означает, что портфель *x\** обеспечивает:

* максимальную ожидаемую доходность среди достижимых (в соответствии с ограничением по уровню риска) портфелей
* минимальный риск среди достижимых (в соответствии с ограничением по уровню ожидаемой доходности) портфелей

Решая задачу (\*1) или (\*2) для различных значений уровня риска и ожидаемой доходности , соответственно, получаем множество эффективных портфелей *x\**, которые составляют эффективное множество

.

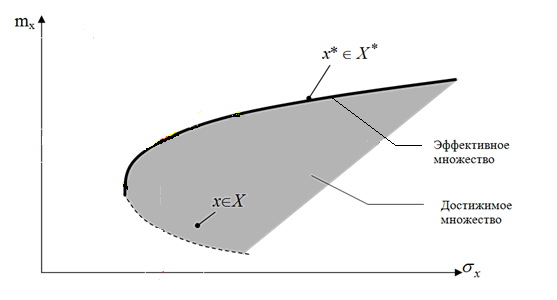
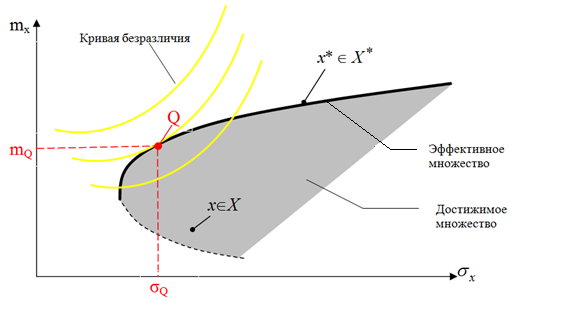


Рисунок 4.1

Каждый портфель является Парето-оптимальным, так как не существует другого допустимого портфеля , который был бы лучше данного сразу по двум критериям: ожидаемой доходности и риску.

Для того чтобы из эффективного множества портфелей *Х\** выбрать портфель максимальной полезности для инвестора, т.е. найти решение задачи (\*), необходимо в системе координат (*σx, mx*) построить кривую эффективного множества *Х\** и карту кривых безразличия данного инвестора .

Оптимальный портфель по сочетанию риска и ожидаемой доходности в соответствии с индивидуальным предпочтением инвестора будет соответствовать точке касания кривой эффективного множества и кривой безразличия инвестора, соответствующей максимальной полезности из всех достижимых кривых безразличия.

******

т. Q (mQ,σQ) – оптимальный портфель инвестора.

Вновь обратимся к модели Марковица. Из ее математической постановки (\*2) следует, что снижение уровня риска портфеля возможно за счет увеличения числа активов в нем, т.е. снижения Причем коэффициент корреляции (ковариация) доходности этих активов должна быть как можно ниже (в лучшем случае – отрицательным).

Таким образом, главный принцип портфельного управления состоит в его диверсификации, т.е. во включении в портфель большого количества разнообразных по своим характеристикам активов.

Напомним, что составляющая рыночного риска, которая может быть снижена диверсификацией, называется несистематическим риском. Систематический же риск не поддается управлению диверсификацией.

4.1.2 Модель рыночного портфеля Дж.Тобина

Модель Дж.Тобина (J.Tobin) является продолжением модели Марковица. Усовершенствование заключается в том, что дисперсия доходностей активов оценивается не относительно друг друга, а относительно рынка в целом.

В отличие от портфеля инвестора рыночный портфель представляет собой набор активов всего рынка в долях представленных на рынке.

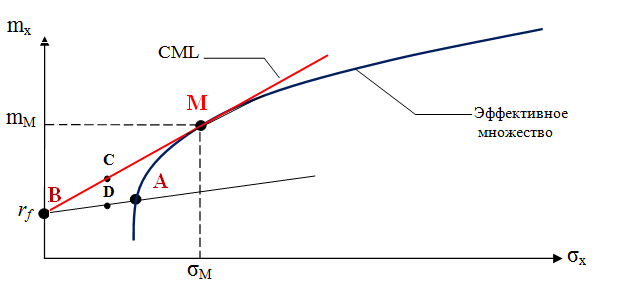
Модель рыночного портфеля Тобина основана на следующих предположениях:

* финансовый рынок и действия на нем индивидуального инвестора описываются моделью Марковица;
* на рынке действуют инвесторы с однородными ожиданиями, т.е. инвесторы одинаково оценивают математическое ожидание и дисперсию доходностей рисковых активов;
* все инвесторы имеют одинаковый инвестиционный горизонт;
* на рынке существует безрисковый актив, каждый инвестор может брать под безрисковую ставку любую сумму;
* рынок находится в равновесии, т.е. величина спроса на финансовые активы равна величине предложения.

Таким образом, финансовый рынок в рамках модели Тобина состоит из безрискового актива с доходностью *rf* и *n* рисковых активов с ожидаемыми доходностями.

Замечание: конечно же, на рынке не существует абсолютно безрисковых активов, т.е. доходность которых постоянна, однако принято считать активы с минимальным риском: долгосрочные депозиты, государственные облигации – безрисковыми.

Воспользуемся графическим отображением модели Марковица (рисунок 4.1).



Обозначим *В* – портфель, состоящий только из безрискового актива, тогда *В*(*0*, *rf*), т.е. *σВ=0* и *mВ=rf*.

Возьмем из эффективного множества некоторый портфель *А (σА*, *mА*). Движение от портфеля *В* к *А* по прямой *ВА* означает увеличение доли рисковых активов (стандартное отклонение доходности растет).

Если из эффективного множества выбрать портфель *М* такой, что *ВМ* – касательная к эффективному множеству, то для каждого портфеля прямой *ВА* можно указать портфель на прямой *ВМ*, который характеризуется таким же риском, но более высокой ожидаемой доходностью, например, портфель *СВМ* доминирует над портфелем *DВА*. Это говорит о том, что для любого портфеля, составленного из смеси рисковых и безрискового активов, можно указать доминирующий портфель, предельное положение которого находится в точке (портфеле) *М*.

Прямая *ВМ* называется линией рынка капитала (CML: capital market line), а портфель *М* – рыночным портфелем.

Определим уравнение линии рынка капитала.

Из того, что т. *В*(*0*, *rf*), т. *М(σМ*, *mМ*) и уравнение прямой есть , имеем

Таким образом, фундаментальное утверждение модели Тобина состоит в том, что связь между риском и ожидаемой доходностью можно считать линейной.

4.1.3 Модель оценки финансовых активов (CAPM)

Модель была разработана Дж.Трейнером (J.Treynor), У.Шарпом (W. Sharpe), Дж.Литнером (J.Lintner) и Я.Моссином (J. Mossin) в 60-х годах 20 века независимо друг от друга. Однако наиболее известна она как модель У.Шарпа или модель капитализации финансовых активов (Capital access pricing model, CAPM).

Модель Тобина исходит из предположения, что каждая случайная величина *ri*(доходность *i*-го актива) зависит только от *rМ* (доходность рыночного портфеля) и нет никакой зависимости между доходностью различных активов, т.е.

Учтем эту зависимость

Модифицируем модель далее

Полученное выражение и есть модель CAPM:

где – бета коэффициент *i*-го актива

Коэффициент бета показывает степень чувствительности изменчивости доходности актива к изменчивости доходности рынка в среднем:

* если , то актив более рискован, чем рынок в среднем;
* если , то актив обладает таким же уровнем риска, что и рынок в среднем;
* если , то актив менее рискован, чем рынок в среднем.

Бета коэффициент рынка в целом равен единице:

Итак, в настоящем разделе были рассмотрены три наиболее широко известные модели управления портфелем активов, однако портфельный анализ гораздо богаче по своему инструментарию. Более подробно и многообразно модели финансовых рынков представлены, например, в [1, 2].

Литература

1. Ширяев, В.И. Модели финансовых рынков. Оптимальные портфели, управление финансами и рисками [Текст] : учебное пособие для вузов / В.И. Ширяев. – М. : Либроком, 2009. – 216 с.
2. Энциклопедия финансового риск-менеджмента [Текст] : энциклопедия / под ред. А.А. Лобанова, А.В. Чугунова. – 4-е изд., испр. и доп. – М. : Альпина Бизнес Букс, 2009. – 931 с.